Ova definicija je deo sledeće opšte definicije.

Definicija 4.1. Neka je $f : X \to [0, \infty]$ merljiva, i $E \in \mathcal{M}$. Lebegov integral funkcije f na E je

$$\int\limits_E f d\mu = \sup_{0 \le s \le f} \int\limits_E s d\mu,$$

gde se supremum uzima po svim jednostavnim merljivim funkcijama $s : X \to [0, \infty]$ sa osobinom $0 \le s \le f$, i $\int\limits_E s d\mu$ je dat sa (4.1). ▲

Primedba. U integralnom računu koji sledi koristimo proširenu aritmetiku na $[-\infty, \infty]$:

$$\infty + \infty = \infty; \ -\infty - \infty = -\infty; \ \pm\infty + a = \pm\infty; \ 0 \cdot \infty = 0.$$

Dakle ako je $\alpha_i = 0$, $\mu(E \cap A_i) = \infty$, tada je $\alpha_i \cdot \mu(E \cap A_i) = 0$.

Teorema 4.1. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa merom i neka su u tvrđenjima (a)- (f) svi skupovi merljivi i sve funkcije $X \to [0, \infty]$ merljive.

a) Neka je $0 \le f \le g$. Sledi $\int\limits_E f d\mu \le \int\limits_E g d\mu$.

b) Neka je $A \subseteq B$, $f \ge 0$. Sledi $\int\limits_A f d\mu \le \int\limits_B f d\mu$.

c) Neka je $f \ge 0$ i $c \in [0, \infty)$. Sledi $\int\limits_E c f d\mu = c \int\limits_E f d\mu$.

d) Neka je $f(x) = 0$, $x \in E$. Sledi $\int\limits_E f d\mu = 0$ (i ako je $\mu(E) = \infty$).

e) Neka je $\mu(E) = 0$. Tada je $\int\limits_E f d\mu = 0$ (i ako je $f(x) \equiv \infty$).

f) Ako je $f \ge 0$, tada je $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f \kappa_E d\mu$.

Dokaz: a) Ako je s jednostavna merljiva funkcija i $0 \le s \le f$, tada je $0 \le s \le g$ te je

$$\int\limits_E f d\mu = \sup_{0 \le s \le f} \int\limits_E s d\mu \le \sup_{0 \le s \le g} \int\limits_E s d\mu = \int\limits_E g d\mu.$$

b) Neka je $0 \le s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \kappa_{A_i} \le f$ na X. Kako su A_i disjunktni i $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, važi

$$\int\limits_A s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap A) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B) = \int\limits_B s d\mu$$